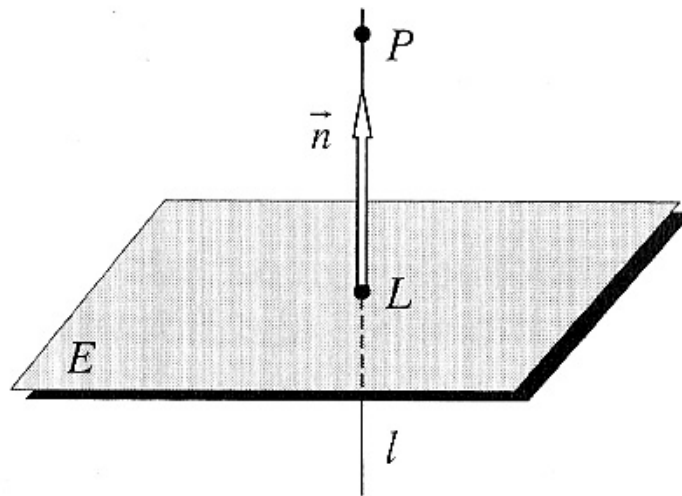


Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Ebene E

1) Lotfußpunktmethode



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Ebene E:

- Aufstellen einer Geraden l , die senkrecht auf der Ebene E steht und den Punkt P enthält (der Normalenvektor der Ebene E ist damit der Richtungsvektor der gesuchten Geraden l und der Aufhängepunkt der Geraden l ist P).
- Schnittpunkt L der Geraden l mit der Ebene E berechnen (L nennt man Lotfußpunkt).
- Der Abstand des Punktes P zur Ebene E ist dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{LP}$.

2) Abstandsformel

Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E kann auch mit Hilfe der folgenden Abstandsformel berechnet werden:

$$d(P;E) = \frac{|n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - n_0|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Hinweis:

Das konstante Glied n_0 muss unbedingt negativ sein. Gegebenenfalls muss die Normalenform der Ebene E mit (-1) multipliziert werden.

Beispiel: $E: 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 13 = 0$ $P(3/2/7)$

Bestimme Gerade l durch $P(3/2/7)$, die auf E senkrecht steht: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$g \cap E = \{F\} \Rightarrow 5(3+5s) - 3(2-3s) + 4(7+4s) + 13 = 0 \Rightarrow s = -1$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

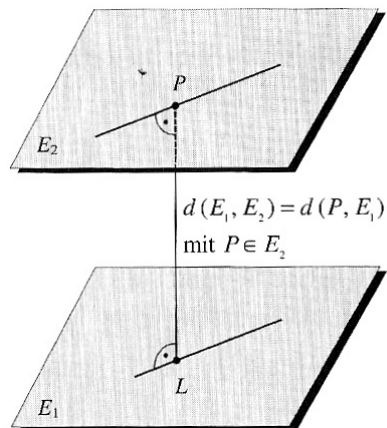
$$\Rightarrow d(P;E) = |\vec{FP}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50}$$

Alternative:

$E: -5x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 13 = 0$ (das konstante Glied muss negativ sein !!)

$$d(P;E) = \frac{\left| -5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 7 - 13 \right|}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{\left| -50 \right|}{\sqrt{50}} = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50}$$

Berechnung des Abstandes zweier paralleler Ebenen



Die Berechnung des Abstandes zweier paralleler Ebenen kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Ebene zurückgeführt werden. Der Abstand zweier paralleler Ebenen E_1 und E_2 ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Ebene E_2 von der Ebene E_1 :

$$d(E_1; E_2) = d(P; E_1).$$

Aufgaben:

$$1 \quad E_1: 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5 = 0 \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{⊗}$$

$$2 \quad E_1: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 16 = 0 \quad E_2: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 24 = 0 \quad \text{○}$$

Lösungen zu den Aufgaben:

1

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{E_1} = (-1) \cdot \vec{n}_{E_2} \Rightarrow \text{Die Ebenen } E_1 \text{ und } E_2 \text{ sind echt parallel oder identisch}$$

Aufhängepunkt von E_2 liegt nicht in $E_1 \Rightarrow E_1$ und E_2 sind echt parallel

$$d(E_1; E_2) = d(A; E_1) \text{ mit } A(0/0/4)$$

$$\text{Gerade } l \text{ durch } A, \text{ die senkrecht auf } E_1 \text{ steht: } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$l \cap E_1 = \{F\} \Rightarrow 2 \cdot 2s + 2 \cdot 2s + 4 + s + 5 = 0 \Rightarrow s = -1$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow d(E_1; E_2) = |\vec{f}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$$

2

$$\vec{n}_{E_1} = \vec{n}_{E_2} \text{ und } n_0 \text{ verschieden} \Rightarrow E_1 \text{ und } E_2 \text{ echt parallel}$$

$$\text{Bestimme Punkt } P \in E_1: x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \Rightarrow -4x_2 - 16 = 0 \Rightarrow x_2 = -4$$

$$\Rightarrow P(0/-4/0)$$

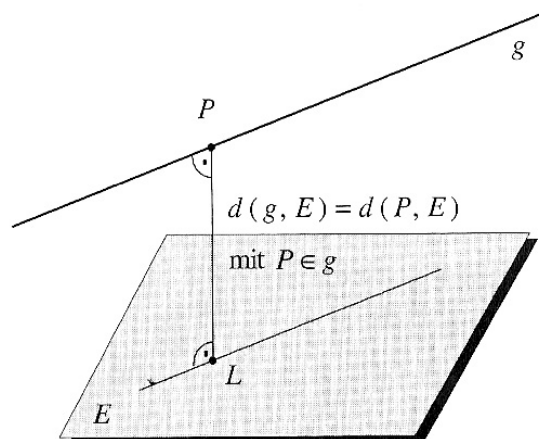
$$\text{Bestimme Gerade } l \text{ durch } P, \text{ die senkrecht auf der Ebene } E_2 \text{ steht: } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$l \cap E_2 = \{F\} \Rightarrow 3 \cdot 3s - 4(-4 - 4s) + 5 \cdot 5s - 24 = 0 \Rightarrow s = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ -\frac{116}{25} \\ \frac{20}{25} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(E_1; E_2) = |\vec{f}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ -\frac{116}{25} \\ \frac{20}{25} \end{pmatrix} \right| = \frac{4}{5} \sqrt{2}$$

Berechnung des Abstandes einer Geraden von einer parallelen Ebene



Auch die Berechnung des Abstandes einer Geraden g von einer parallelen Ebene E kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Ebene zurückgeführt werden. Der Abstand einer Geraden g von einer parallelen Ebene E ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden g von der Ebene E : $d(g;E) = d(P;E)$.

Aufgaben:

1 Bestimmen Sie den Abstand der Ebene $E: -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ und der

zu E parallelen Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ○

2 Prüfen Sie, ob es Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 9 = 0$ parallel sind und den Abstand 1 besitzen. ☹

Lösungen zu den Aufgaben:

1

Bestimme Gerade l durch $P(5/-3/2)$, die senkrecht auf E steht: $\vec{l}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$l \cap E = \{F\} \Rightarrow -(5-s) + 4(-3+4s) + 2(2+2s) - 8 = 0 \Rightarrow s = 1$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g; E) = |\overrightarrow{FP}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{21}$$

2

$$\vec{n}_E \cdot \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a + 2b \Rightarrow a + 2b = 0$$

Gerade l durch $P(a/1/0)$ bestimmen, die auf E senkrecht steht: $\vec{l}: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$l \cap E = \{F\} \Rightarrow a + s + 2(1+2s) - 2(-2s) - 9 = 0 \Rightarrow s = \frac{7-a}{9}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7-a}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow d(g; E) = |\overrightarrow{FP}| = \left| \frac{7-a}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\sqrt{\frac{49-14a+a^2}{81} + \frac{196-56a+4a^2}{81} + \frac{196-56a+4a^2}{81}} = \sqrt{\frac{9a^2-126a+441}{81}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{9a^2-126a+441}{81}} = 1 \Rightarrow \frac{9a^2-126a+441}{81} = 1$$

$$\Rightarrow 9a^2 - 126a + 441 = 81 \Rightarrow 9a^2 - 126a + 360 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{126 \pm \sqrt{126^2 - 4 \cdot 9 \cdot 360}}{18} = \frac{126 \pm 54}{18}$$

$$\Rightarrow a_1 = 10 \Rightarrow b_1 = -5$$

$$\Rightarrow a_2 = 4 \Rightarrow b_2 = -2$$